Modul Geometrie 8. Dezember 2008

Wintersemester 2008-2009

Schmale

Aufgaben

(21) Im $\mathbb{R}^2$ seien endlich viele parallele Strecken $S_1, \ldots, S_r$ gegeben mit der Eigenschaft

Zu je dreien der Strecken gibt es eine Grade, die alle drei schneidet.

Zeigen Sie: Es gibt dann eine Grade, die alle Strecken schneidet.

Anleitung, falls Sie keine bessere Idee haben: Seien Γ und Γ' zwei verschiedene zu den Strecken parallele Graden, auf denen keine der Strecken liegt. Zeige, dass die Mengen

$$C_i = \{(a,b) \in \Gamma \times \Gamma' : \quad (a \vee b) \cap S_i \neq \varnothing \ \} \subseteq \mathbb{R}^4$$

konvex sind. Dabei kann der Satz des Thales helfen. Zeige nun noch, dass es nach Wahl eines Basisvektors in $\overrightarrow{\Gamma} (= \overrightarrow{\Gamma'})$ eine natürliche Affinität $f : \Gamma \times \Gamma' \to \mathbb{R}^2$ gibt. Mit deren Hilfe kann bei genauem Hinsehen der Satz von Helly im Falle $n = 2$ angewendet werden, um die Behauptung der Aufgabe nachzuweisen.

(22) (a) Berechnen Sie die Fläche des folgenden Dreiecks in $\mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{C}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}) \ .$$

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ affin unabhängig. Betrachtet werden die Graden

$$W_a = a + \mathbb{R}w_a, W_b = b + \mathbb{R}w_b, W_c = c + \mathbb{R}w_c$$

mit

$$\begin{aligned} w_a &= \frac{\lambda_b}{\lambda} \cdot (b-a) + \frac{\lambda_c}{\lambda} \cdot (c-a) \\ w_b &= \frac{\lambda_c}{\lambda} \cdot (c-b) + \frac{\lambda_a}{\lambda} \cdot (a-b) \\ w_c &= \frac{\lambda_a}{\lambda} \cdot (a-c) + \frac{\lambda_b}{\lambda} \cdot (b-c) \end{aligned}$$

und

$$\lambda_a = \| \ b - c \ \|, \lambda_b = \| \ c - a \|, \lambda_c = \| \ a - b \|, \lambda = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c \ .$$

Zeigen Sie: W_a, W_b, W_c schneiden sich in dem Punkt

$$w = \frac{\lambda_a}{\lambda} \cdot a + \frac{\lambda_b}{\lambda} \cdot b + \frac{\lambda_c}{\lambda} \cdot c \ .$$

Um was für Graden handelt es sich eigentlich?

(23) Zusatzaufgabe. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ affin unabhängig. Seien p, q, r die orthogonalen Projektionen von a, b, c auf die jeweils „gegenüberliegende“ Grade $b \vee c, c \vee a, a \vee b$. Weisen Sie im Kontext der Vorlesung nach, dass stets mindestens eine der folgenden Aussagen wahr ist:

$$p \in [b, c] \ , \quad q \in [c, a] \ , \quad r \in [a, b] \quad .$$